粗凸空間のホロ境界

東京都立大学　大学院理学研究科　数理科学専攻
佐藤一慶 (Ikkei SATO) *

概要

ホロ境界とは, 連続関数を用いて構成される距離空間のコンパクト化である. 距離空間の大域的な情報を含む概念であり, 測地的 Gromov 双曲空間や CAT(0) 空間, Busemann 空間を始めとする非正曲率空間では, 同じく非正曲率空間の大域的な情報を含む概念である理想境界との対応が研究されてきた. 本研究では, 非正曲率空間の一般化と見なせる「粗凸空間」において, そのホロ境界と理想境界の対応について調べた.

1　粗凸空間

粗凸空間は, 測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとする非正曲率空間を統一する概念として, 深谷友宏氏及び尾國新一氏 [FO20] により導入された. この節では, 粗凸空間の定義と具体例, 及び関連する諸概念について紹介する.

1.1　粗凸空間

(X,d) を距離空間とする. X 上で定義される bicombing $\Gamma\colon X\times X\times[0,1]\to X$ とは, $x,y\in X$ に対して, $\Gamma(x,y,0)=x$, $\Gamma(x,y,1)=y$ を満たす写像のことである.

$\lambda\geq 1$, $k\geq 0$ を定数とする. bicombing Γ が (λ,k)**-quasi geodesic bicombing** であるとは, 任意の $x,y\in X$ と任意のパラメータ $t,s\in[0,1]$ に対して, 以下の不等式が成り立つことを意味する.

$$\frac{1}{\lambda}|t-s|d(x,y)-k\leq d(\Gamma(x,y,t),\Gamma(x,y,s))\leq\lambda|t-s|d(x,y)+k$$

特に, bicombing Γ が **geodesic bicombing** であるとは, 任意の $x,y\in X$ と任意のパラメータ $t,s\in[0,1]$ に対して, 以下の等式が成り立つことを意味する.

$$d(\Gamma(x,y,t),\Gamma(x,y,s))=|t-s|d(x,y)$$

定義 1.1 (Coarsely convex bicombing)**.** (X,d) を距離空間, $\lambda\geq 1,k\geq 0,E\geq 1,C\geq 0$ を定数とする. また, $\theta\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする. (X,d) 上の (λ,k,E,C,θ)**-coarsely convex bicombing** とは, (λ,k)-quasi geodesic bicombing であって, 以下の条件を満たすものである.

* E-mail:sato-ikkei@ed.tmu.ac.jp

(1) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $a, b \in [0,1]$ に対して, $y_1' \coloneqq \Gamma(x_1, y_1, a)$, $y_2' \coloneqq \Gamma(x_2, y_2, b)$ とする. このとき, 任意の $c \in [0,1]$ に対して以下が成立する.

$$d(\Gamma(x_1, y_1, ca), \Gamma(x_2, y_2, cb)) \leq (1-c)Ed(x_1, x_2) + cEd(y_1', y_2') + C$$

(2) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $t, s \in [0,1]$ に対して, 以下が成立する.

$$|td(x_1, x_2) - sd(y_1, y_2)| \leq \theta(d(x_1, x_2) + d(\Gamma(x_1, y_1, t), \Gamma(x_2, y_2, s))$$

特に geodesic bicombing Γ で, 条件 (1) を満たすものを **geodesic (E, C)-coarsely convex bicombing** という.

注 1.2. Γ が geodesic bicombing の場合, 三角不等式により Γ は定義 1.1 の条件 (2) を自動的に満たす.

定義 1.3 (粗凸空間)**.** ある定数 $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1, C \geq 0$ と非減少関数 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, $(\lambda, k, E, C, \theta)$-coasely convex bicombing が定義されている距離空間 (X, d) を $(\lambda, k, E, C, \theta)$**-粗凸空間**（もしくは単に**粗凸空間**）という. 特に, geodesic (E, C)-coarsely convex bicombing が定義されている距離空間を**測地的** (E, C)**-粗凸空間**（もしくは単に**測地的粗凸空間**）という.

例 1.4. V をノルム空間とする. V 上の bicombing を, 2 点を結ぶ Affine 直線で与えると, V は測地的 $(1, 0)$-粗凸空間である.

例 1.5. 距離空間 (X, d) が **Busemann 空間**であるとは, 測地空間であり, 更に任意の測地線 $\gamma_1\colon [0, a_1] \to X$, $\gamma_2\colon [0, a_2] \to X$ と, 任意の $t \in [0,1]$ に対して以下の不等式が成り立つことを意味する.

$$d(\gamma_1(ta_1), \gamma_2(ta_2)) \leq (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + td(\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

したがって, Busemann 空間 (X, d) は一意測地的である. 特に, Busemann 空間 (X, d) 上では canonical な $(1, 0)$-coarsely convex bicombing を定義できることから, Busemann 空間は測地的 $(1, 0)$-粗凸空間である.

以下の定義は, section 1.2 及び section 3.1 で用いる.

定義 1.6. (X, d) を距離空間, $\Gamma\colon X \times X \times [0,1] \to X$ を X 上で定義された (λ, k)-quasi geodesic bicombing とする. このとき, **reparametrized bicombing** $\mathtt{rp}\Gamma\colon X \times X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように定義する.

$$\mathtt{rp}\Gamma(x, y, t) \coloneqq \begin{cases} \Gamma\left(x, y, \frac{t}{d(x,y)}\right) & \text{if } t \leq d(x, y) \\ y & \text{if } t > d(x, y). \end{cases}$$

geodesic bicombing に対しても, 同様に reparametrized bicombing を定義できる.

1.2 理想境界

測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとして非正曲率空間には理想境界というコンパクト化が定義できた. 同様の概念は粗凸空間に対しても定義ができることを紹介する.

(X,d) を粗凸空間, Γ を X 上の coarsely convex bicombing, $\mathtt{rp}\Gamma$ を Γ の reparametrized bicombing とする．また $o \in X$ を基点として固定する．

定義 1.7 (Gromov 積)**.** $k_1 \coloneqq \lambda + k,\ D \coloneqq 2(1+E)k_1 + C,\ D_1 \coloneqq 2D+2$ とする．このとき, $(- \mid -)_o \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように定義する．

$$(x \mid y)_o \coloneqq \min\{d(o,x), d(o,y), \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid d(\mathtt{rp}\Gamma(o,x,t), \mathtt{rp}\Gamma(o,y,t)) \leq D_1\}\}$$

[FOY22] の議論により, 粗凸空間の理想境界を定義する．以下のような X 上の点列による集合を与える．

$$S_o^\infty X \coloneqq \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ は } (x_m \mid x_n)_o \to \infty \text{ as } m,n \to \infty \text{ を満たす点列.}\}$$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S_o^\infty X$ に対して, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であるとは,

$$(x_n \mid y_n)_o \to \infty \text{ as } n \to \infty$$

と定義する．このとき, $\sim$ は $S_o^\infty X$ 上の同値関係を定める．

定義 1.8. (X,d) を粗凸空間とする．X の**理想境界** $\partial_o X$ を, $S_o^\infty X$ を同値関係 $\sim$ で割った集合として定義する．また $\bar{X}$ を, X と $\partial_o X$ の非交和として定義する．すなわち, 以下のように定義する．

$$\partial_o X \coloneqq S_o^\infty X/\sim, \quad \bar{X} \coloneqq X \cup \partial_o X$$

$x \in X$ と X 上の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in x$ と表した場合, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n = x$ が成り立つことを意味する．Gromov 積 $(- \mid -)_o \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, 以下のようにして $(- \mid -)_o \colon \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に拡張する．すなわち任意の $x, y \in \bar{X}$ に対して,

$$(x \mid y)_o \coloneqq \sup\{\liminf_{n\to\infty} (x_n \mid y_n)_o \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in x, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in y\}$$

と定義する．

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, V_n を以下のように定義する．

$$V_n \coloneqq \{(x,y) \in \bar{X} \times \bar{X} \mid (x \mid y)_o > n\}\} \cup \left\{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\right\}$$

このとき, 族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X \cup \partial_o X$ に一様構造を定める．またこれは距離化可能である．任意の $x \in \bar{X}$ に対して, $V_n[x] \subset \bar{X}$ を以下のように定める．

$$V_n[x] \coloneqq \{y \in \bar{X} \mid (x,y) \in V_n\}$$

このとき, 族 $\{V_n[x]\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x の基本近傍系を定める．

命題 1.9 ([FO20, Proposition 4.19])**.** 十分小さい $\epsilon > 0$ と, $D, \theta(0), \epsilon$ により定まる定数 $K \geq 1$ に対して, 以下を満たす $\partial_o X$ 上の距離 d_ϵ が存在する．すなわち, 任意の $x, y \in \partial_o X$ に対して,

$$\frac{1}{K} e^{-\epsilon (x \mid y)_o} \leq d_\epsilon(x,y) \leq e^{-\epsilon (x \mid y)_o}$$

が成り立つ．特に距離 d_ϵ により定まる位相は $\partial_o X$ における位相と一致しており, 距離空間 $(\partial_o X, d_\epsilon)$ は直径が 1 以下である．

注 1.10. 粗凸空間の理想境界は, 基点の取り方に依らず定めることができる. また, $\partial_o X$ 及び $\bar{X} = X \cup \partial_o X$ は位相空間としてコンパクトである.

2 ホロ境界

2.1 ホロ境界

(X, d) を固有な距離空間として, $o \in X$ を基点として固定する. また, $C(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$-値連続関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\phi\colon X \to C(X)$ を以下のように定義する.

$$x \mapsto \phi_x(-) \coloneqq d(-, x) - d(o, x)$$

定義 2.1 (ホロ境界)**.** (X, d) を固有な距離空間, $o \in X$ を基点として固定する. $\phi\colon X \to C(X)$ を上記で定義した写像とする. このとき, 距離空間 (X, d) の**ホロ境界** $\partial_h X$ を

$$\partial_h X \coloneqq \mathrm{cl}\, \phi(X) \setminus \phi(X)$$

と定義する. ここで, cl は $C(X)$ の位相に関する閉包を表している.

注 2.2. $\phi\colon X \to C(X)$ は基点を固定して定義しているが, ホロ境界は基点に依らず定まる. また, $C(X)$ は位相空間として Hausdorff 空間であることから, ホロ境界も Hausdorff 空間である.

例 2.3. $(\mathbb{R}^2, l^1)$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に l^1-距離を入れた距離空間とする. ここで l^1-距離とは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$l^1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \coloneqq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

と定義される $\mathbb{R}^2$ 上の距離である. このとき, ホロ境界 $\partial_h(\mathbb{R}^2, l^1)$ は $\partial[-\infty, \infty]^2$ と同相である.

2.2 被約ホロ境界

定義 2.4. (X, d) を固有な距離空間, $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. $\xi, \eta \in \partial_h X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは,

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する. このとき, $\sim$ は $\partial_h X$ に対して同値関係を定める. (X, d) の**被約ホロ境界**を, ホロ境界 $\partial_h X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h X / \sim$ として定義する. また, その位相は $\partial_h X$ から誘導される商位相を入れる.

一般に固有な測地的 Gromov 双曲空間に対して, その理想境界とホロ境界が必ずしも一致するとは限らない. しかし, Webster と Winchester[WW03] は以下の定理を示した.

定理 2.5 ([WW03, Theorem 4.5])**.** (X,d) を固有な測地的 Gromov 双曲空間とし, $o \in X$ を基点として固定する. $\partial_o X$ を基点 o に関する X の理想境界とし, また $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. このとき, $\partial_h X$ から $\partial_o X$ に自然な商写像が存在する.

定理 2.5 の系として, 測地的 Gromov 双曲空間においては理想境界と被約ホロ境界は位相を込めて一致することが従う. しかし, 同様の結果は粗凸空間に対して成り立たない. 例えば, 例 1.4 でノルム空間が測地的粗凸空間であることを見たが, $(\mathbb{R}^2, l^1)$ の被約ホロ境界は Hausdorff 空間にならない. 一方で, 粗凸空間の理想境界は距離化可能であることから Hausdorff 空間である.

3 主結果

3.1 錐距離

Andreev は Busemann 空間に対して**錐距離**を定義し, Busemann 空間においては錐距離を用いたホロ境界と, Busemann 空間に元々定義されていた距離による理想境界が位相を込めて一致することを示した [And18, Theorem. 3.4]. 我々は, 測地的粗凸空間に対しても錐距離を定式化した.

定義 3.1. (X,d) を測地的 (E,C)-粗凸空間, Γ を X 上で定義された geodesic (E,C)-coarsely convex bicombing, $\mathtt{rp}\Gamma$ を Γ の reparametrized bicombing とする. また $o \in X$ を基点として固定する. このとき, $x, y \in X$ に対して**錐距離** $d_c(x,y)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} d_c(x,y) &:= |d(o,x) - d(o,y)| \\ &\quad + d(\mathtt{rp}\Gamma(o,x,\min\{d(o,x),d(o,y)\}), \mathtt{rp}\Gamma(o,y,\min\{d(o,x),d(o,y)\})) \end{aligned}$$

錐距離の定義より, 任意の $x \in X$ に対して $d_c(o,x) = d(o,x)$ が成立する. また, 錐距離は非負性, 非退化性及び対称性を満たしている.

注 3.2. 例 1.5 で見たように, Busemann 空間は測地的 $(1,0)$-粗凸空間である. このとき定義 3.1 で与えた錐距離の定義は, Andreev が [And18] で与えた錐距離の定義と一致している.

補題 3.3. (X,d) を測地的 (E,C)-粗凸空間とする. このとき, 任意の $x,y,z \in X$ に対して以下が成立する.

$$d_c(x,z) \le E d_c(x,y) + E d_c(y,z) + C$$

特に (X,d) が測地的 $(1,0)$-粗凸空間であれば, d_c は X 上の距離を定める.

3.2 錐距離によるホロ境界

この節では錐距離を用いたホロ境界を定義し, 理想境界との対応について解説する. (X,d) を固有な測地的 (E,C)-粗凸空間として, $o \in X$ を基点として固定する. また, $B(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$-値関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\psi\colon X \to B(X)$ を以下のように定義する.

$$x \mapsto \psi_x(-) := d_c(-,x) - d_c(o,x)$$

定義 3.4 (錐距離によるホロ境界)**.** (X, d) を固有な測地的 (E, C)-粗凸空間, $B_b(X)$ を X 上で定義される有界連続関数全体の集合とする．また $\psi\colon X \to B(X)$ を上記のように定義する．X 上で定義された関数の集合 $B_{b,E}(X)$ を以下のように定義する．

$$B_{b,E}(X) \coloneqq \left\{ f \in B(X) \;\middle|\; \frac{1}{E}\psi_x - \beta \le f \le E\psi_x + \beta,\ \exists x \in X, \exists \beta \in B_b(X) \right\}$$

このとき, **錐距離によるホロ境界** $\partial_h^c X$ を以下のように定義する．

$$\partial_h^c X \coloneqq \mathrm{cl}\,\psi(X) \setminus B_{b,E}(X)$$

ここで, cl は $B(X)$ の位相に関する閉包を表している．

注 3.5. 錐距離を用いたホロ境界の元である関数は, 連続関数である．

錐距離によるホロ境界に対して, 我々は以下の命題が成り立つことを示した．

命題 3.6. (X, d) を固有な測地的 (E, C)-粗凸空間として, $o \in X$ を基点として固定する．このとき, 錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ から理想境界 $\partial_o X$ に全射連続写像 $\mathrm{Pr}\colon \partial_h^c X \to \partial_o X$ を構成できる．

3.3 錐距離による被約ホロ境界

定義 2.4 と同様に, 定義 3.4 で定義された錐距離によるホロ境界に対しても, 被約ホロ境界を定義できる．

定義 3.7. (X, d) を固有な距離空間, $\partial_h^c X$ を X の錐距離によるホロ境界とする．$\xi, \eta \in \partial_h^c X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは,

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する．このとき, $\sim$ は $\partial_h^c X$ に対して同値関係を定める．(X, d) の**錐距離による被約ホロ境界**を, 錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h^c X/\sim$ として定義する．また, その位相は $\partial_h^c X$ から誘導される商位相を入れる．

錐距離による被約ホロ境界に対して, 命題 3.6 の系として以下の定理が従う．

定理 3.8 (主定理)**.** (X, d) を固有な測地的 (E, C)-粗凸空間, $o \in X$ を基点として固定する．このとき, 錐距離による被約ホロ境界 $\partial_h^c X/\sim$ と理想境界 $\partial_o X$ は位相を込めて一致する．

Busemann 空間では, 錐距離によるホロ境界とその商集合である被約ホロ境界は一致している．したがって定理 3.8 は, Andreev が Busemann 空間に対して示した結果 [And18, Theorem. 3.4] の測地的粗凸空間への一般化となっている．

参考文献

[And18] Pavel Andreev. The cone metric of a busemann space. *Journal of Geometry*, 109(1):25, 2018.

[FO20] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, 12(3):857–895, 2020.

[FOY22] Tomohiro Fukaya, Shin-ichi Oguni, and Takamitsu Yamauchi. Coarse compactifications and controlled products. *Journal of Topology and Analysis*, 14(04):875–900, 2022.

[WW03] Corran Webster and Adam Jeremiah Winchester. Boundaries of hyperbolic metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 221:147–158, 2003.